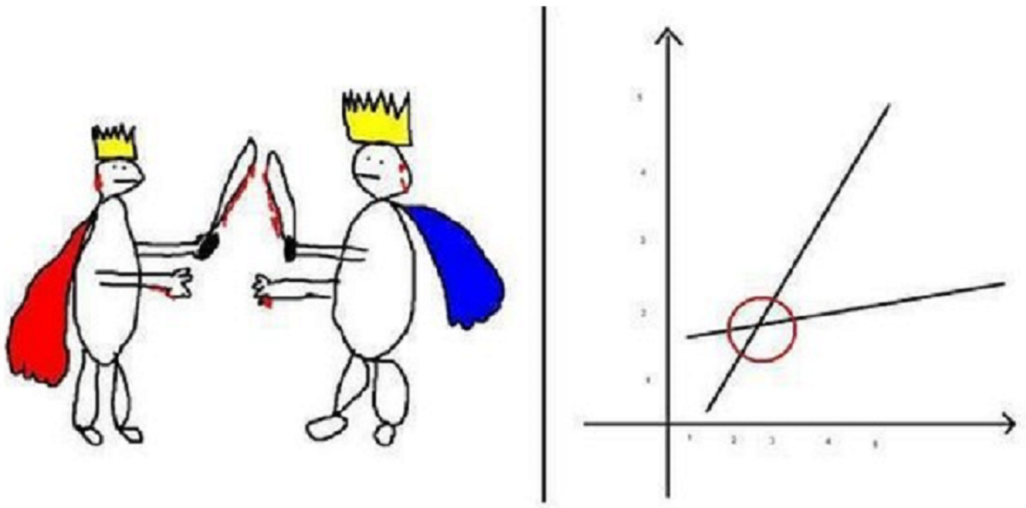
S23a, Herbstsemester 2024 Cedric Schärer (SAE)

Kantonsschule Solothurn

Lineare Funktionen

Verwechslungsgefahr



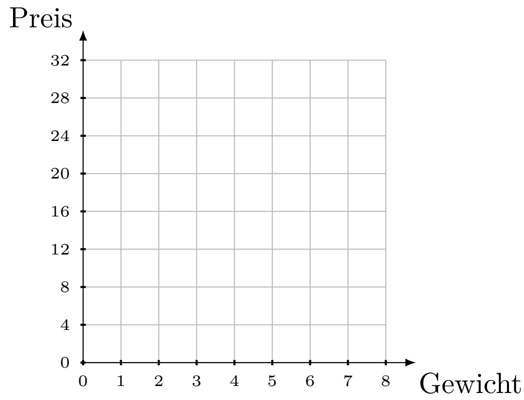
Zwei Grafen schneiden sich Zwei Graphen schneiden sich

Inhaltsverzeichnis

1 Repetition

Aufg. 1.1: In einem Laden kostet 1 kg Äpfel Fr. 3.90. Fülle die Wertetabelle aus und trage die entsprechenden Punkte im Diagramm ein:

Gewicht [kg]	1	2	5	7.7
Preis [Fr.]				



Vermutung: Es besteht ein Zusammenhang zwischen den beiden Grössen. Wie kannst du dies überprüfen?

Def. 1.2: Eine Funktion $f : D \to Z$ heisst **Proportionalität**, wenn sie eine (und somit beide) der folgenden Eigenschaften hat:

- $\forall\, x \in D \setminus \{0\} : \frac{f(x)}{x} = k$
- $\forall\, x \in D, a \in \mathbb{R} : f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$

Dabei heisst k **Proportionalitätsfaktor** und der Graph $G(f)$ ist eine durch den Ursprung gehende Gerade.

Aufg. 1.3: Betrachte nochmals vorherige Aufgabe. Es sei nun f die Funktion, die jedem Gewicht x einen Preis $f(x)$ zuordnet. Berechne:

$k =$

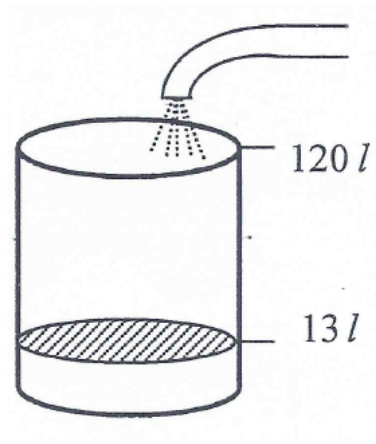
Wie lautet die Funktionsgleichung?

$f(x) =$

Dies lässt sich direkt aus der ersten Eigenschaft der obigen Definition herleiten.

Aufg. 1.4: Ein Gefäss ist bereits zu 13 Liter gefüllt. Eine Pumpe beginnt mit 5.3 l/min zu füllen. Die Funktion f gibt die Füllmenge nach x Minuten an. Bestimme die Funktionsgleichung:

$f(x) =$



2 Die Parameter einer linearen Funktion

Def. 2.1: Eine Funktion $f : D \to Z$ heisst **lineare Funktion**, wenn ihre Funktionsgleichung die Form

$$f(x) = mx + q$$

hat.

Was haben die Parameter m und q für einen Einfluss?

Aufg. 2.2: Zeichne die Graphen folgender zwei Funktionen:

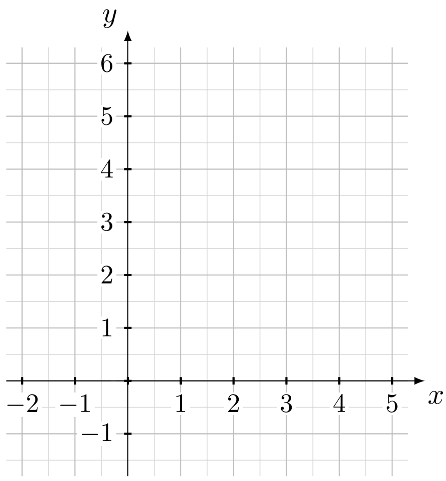
$$f(x) = 2x$$

$$g(x) = 2x + 3$$

Wie unterscheidet sich g von f? Berechne:

$$f(0) =$$

$$g(0) =$$



Def. 2.3: Der Graph jeder linearen Funktion $f(x) = mx+q$ ist eine Gerade. Andererseits wird jede Gerade g durch die Funktionsgleichung $y = f(x) = mx + q$ beschrieben.

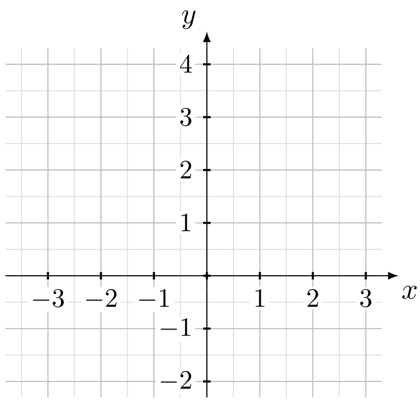
Aufg. 2.4: Zeichne die Graphen folgender drei Funktionen:

$$f(x) = 2x + 1$$

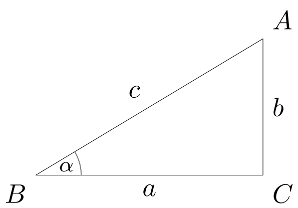
$$g(x) = \frac{1}{3}x + 1$$

$$h(x) = -x + 1$$

Wie unterscheiden sich f, g und h?



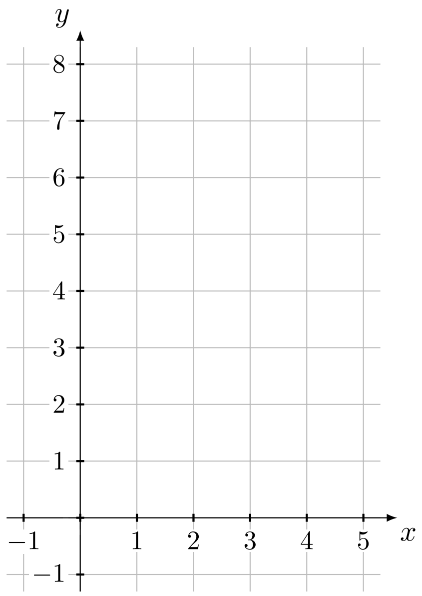
Erinnerung:



Wie berechnet man den Steigungswinkel α?

$$\alpha =$$

Aufg. 2.5: Zeichne den Graphen der Funktion $f(x) = 1.5x + 1$. Berechne dann den Steigungswinkel α.



$\tan\alpha =$

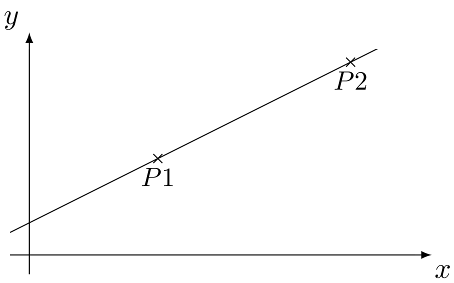
$\alpha =$

Vergleiche die Steigung mit dem Parameter m. Was fällt auf?

Es gilt: $m =$

Wie bestimmt man den Parameter m, wenn man die Funktionsgleichung nicht gegeben hat?

Aufg. 2.6: Gegeben sei eine Gerade g. Weiter liegen die beiden Punkte $P_1(x_1 \mid y_1)$ und $P_2(x_2 \mid y_2)$ auf der Geraden.



Zeichne das Steigungsdreieck ein und gib die Steigung an:

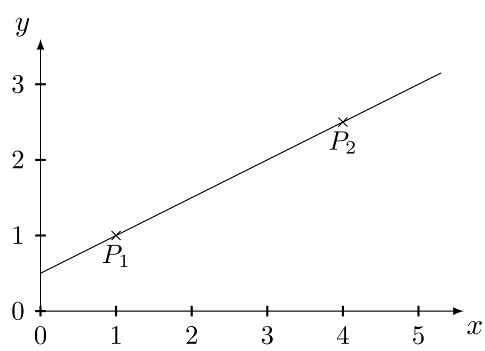
$m =$

Bsp. 2.7: Eine Gerade g geht durch die beiden Punkte $P_1(1 \mid 1)$ und $P_2(4 \mid 2.5)$. Bestimme die Parameter m und q der Geradengleichung.

$m =$

$q =$

$f(x) =$



Thm. 2.8: Eine Gerade g ist durch zwei auf ihr liegenden Punkte eindeutig definiert.

Def. 2.9: Es sei g eine Gerade beschrieben durch die Funktionsgleichung $f(x) = mx + q$. Dann gilt:

- q heisst ***y*-Achsenabschnitt** und beschreibt den Punkt $(0 \mid q)$, bei dem die Gerade die y-Achse schneidet.
- $m = \tan\alpha$ heisst **Steigung** und steht für das Verhältnis $\Delta y : \Delta x$.

Thm. 2.10: Sind zwei Punkte P_1 und P_2 gegeben, die auf g liegen und somit die Funktionsgleichung erfüllen. Dann gilt:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y\text{-Koordinatendifferenz}}{x\text{-Koordinatendifferenz}}$$

$$q = y_1 - m \cdot x_1 = y_2 - m \cdot x_2$$

Sind nicht zwei auf der Geraden liegende Punkte bekannt, muss entsprechend angepasst werden:

- Ist m und ein Punkt P gegeben, kann direkt q berechnet werden.
- Ist q und ein Punkt P gegeben, so kann q als der Punkt $Q(0 \mid q)$ betrachtet und dadurch m berechnet werden.
- Ist anstelle von m der Steigungswinkel α gegeben, so kann daraus $m = \tan\alpha$ berechnet werden.

3 Wenn sich Graphen schneiden

Ein Punkt $P(p_x \mid p_y)$ liegt genau dann auf einer Geraden g mit der Funktionsgleichung $f(x) = mx + q$, wenn gilt:

$$f(p_x) = p_y$$

Mit der Funktionsgleichung lässt sich also die Schnittmenge einer Geraden und eines Punktes bestimmen. Funktioniert dies auch für zwei Geraden?

Es gibt drei Möglichkeiten, wie zwei Geraden g_1 und g_2 zueinander liegen können:

1. Sie schneiden sich in einem einzelnen Punkt.
2. Sie sind identisch.
3. Sie sind (echt) parallel.

Aufg. 3.1: Die beiden Geraden haben die Funktionsgleichungen $g_1 : f_1(x) = m_1x + q_1$ und $g_2 : f_2(x) = m_2x + q_2$. Was kannst du für die drei möglichen Lagen über die Parameter m_1, m_2, q_1 und q_2 aussagen? Wie schaut die Schnittmenge aus?

1.
2.
3.

Wenn man nun die Schnittmenge bestimmen will, geht man gleich vor wie bei der Schnittmenge von Punkt und Geraden. Der Punkt $P(p_x \mid p_y)$ erfüllt die Bedingung, dass sein y-Wert an der Stelle p_x genau p_y ist. Im Unterschied zu einer Geraden ist der Punkt nur bei einem x-Wert definiert.

Zwei durch $g_1 : f_1(x) = m_1x + q_1$ und $g_2 : f_2(x) = m_2x + q_2$ gegebene Geraden, die sich in genau einem Punkt schneiden, besitzen also einen Punkt $S(s_x \mid s_y)$, der auf beiden Geraden liegt, sprich beide Funktionsgleichungen erfüllt. Es gilt:

$$f_1(s_x) = s_y \qquad \text{und} \qquad f_2(s_x) = s_y$$

Insbesondere kann man also die beiden Funktionsgleichungen gleichsetzen und es gilt:

$$f_1(s_x) = f_2(s_x)$$

Dies ist eine einfache Gleichung in x!

Bsp. 3.2: Gegeben sind die Funktionsgleichungen $f_1(x) = 3x - 3$ und $f_2(x) = -x + 3$. Bestimme die Schnittmenge. Da

$$m_1 = \qquad\qquad = m_2$$

schneiden sie sich in einem Punkt S. Gleichsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} &= && \mid \\ &= && \mid \\ x &= && \end{aligned}$$

Einsetzen des x-Wertes in eine der beiden Funktionsgleichungen ergibt:

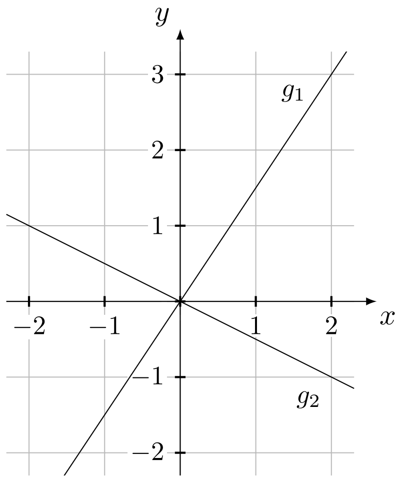
$$f_1(\quad) =$$

$$f_2(\quad) =$$

Also haben g_1 und g_2 einen Schnittpunkt bei $S(\quad \mid \quad)$.

Def. 3.3: Ein **Schnittwinkel** ist ein Winkel, den zwei sich schneidende Kurven oder Flächen bilden. Beim Schnitt zweier Geraden entstehen vier Schnittwinkel, wovon je zwei aneinanderliegende Wechselwinkel und zwei gegenüberliegende Scheitelwinkel sind. Mit **Schnittwinkel zwischen zwei Geraden** ist dabei der kleinere der beiden Wechselwinkel gemeint.

Bsp. 3.4: Gegeben sind die Geraden g_1 und g_2. Berechne den Schnittwinkel α:



Zeichne die Steigungsdreiecke ein und berechne die dazugehörigen Steigungswinkel α_1 und α_2:

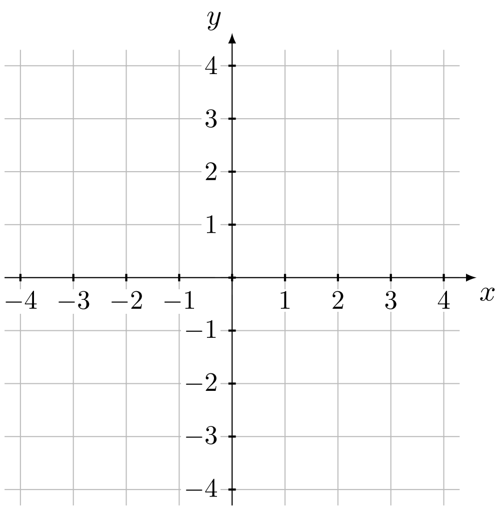
$\alpha_1 =$

$\alpha_2 =$

Berechne nun den Steigungswinkel α:

$\alpha =$

Aufg. 3.5: Gerade g_1 geht durch die Punkte $P_1(-3 \mid 4)$ und $P_2(3 \mid -1)$, Gerade g_2 hat einen Steigungswinkel von 45° und geht durch den Punkt $P_3(3 \mid 2)$. Berechne die Funktionsgleichungen f_1 und f_2, den Schnittpunkt S sowie den Schnittwinkel α.



Thm. 3.6: Für den **Schnittwinkel zweier Geraden** gilt:

$$\alpha = \left|\tan^{-1}(m_1) - \tan^{-1}(m_2)\right|$$

Falls $\alpha > 90°$ ist, muss der Winkel von $180°$ subtrahiert werden, um den kleineren Wechselwinkel zu erhalten.

Man findet für den Schnittwinkel zweier Geraden oft auch die Formel

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|\right)$$

Dies kommt von den Additionstheoremen der trigonometrischen Funktionen. Durch Umformen des Ausdruckes $\tan(\alpha_1 - \alpha_2)$ erhält man die entsprechende Formel. Diese Formel birgt allerdings das Problem, dass sie bei einem $90°$-Winkel zwischen den beiden Geraden nicht funktioniert.